2012年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

本试题卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（必考题和选考题两部分）。考生作答时，将答案答在答题卡上（答题注意事项见答题卡），在本试题卷上答题无效。考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一. 选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2<0\}$，$B=\{x\mid -1<x<1\}$，则

（A）$A\subsetneqq B$　（B）$B\subsetneqq A$　（C）$A=B$　（D）$A\cap B=\varnothing$

（2）复数 $z=\dfrac{-3+i}{2+i}$ 的共轭复数是

（A）$2+i$　（B）$2-i$　（C）$-1+i$　（D）$-1-i$

（3）在一组样本数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ （$n\geqslant 2, x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等）的散点图中，若所有样本点 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 都在直线 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ 上，则这组样本数据的样本相关系数为

（A）-1　（B）0　（C）$\dfrac{1}{2}$　（D）1

（4）设 F_1,F_2 是椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点，P 为直线 $x=\dfrac{3a}{2}$ 上一点，$\triangle F_2PF_1$ 是底角为 $30°$ 的等腰三角形，则 E 的离心率为

（A）$\dfrac{1}{2}$　（B）$\dfrac{2}{3}$　（C）$\dfrac{3}{4}$　（D）$\dfrac{4}{5}$

(5) 已知正三角形 ABC 的顶点 $A(1,1)$，$B(1,3)$，顶点 C 在第一象限，若点 (x,y) 在 $\triangle ABC$ 内部，则 $z=-x+y$ 的取值范围是

（A）$(1-\sqrt{3},2)$　　（B）$(0,2)$

（C）$(\sqrt{3}-1,2)$　　（D）$(0,1+\sqrt{3})$

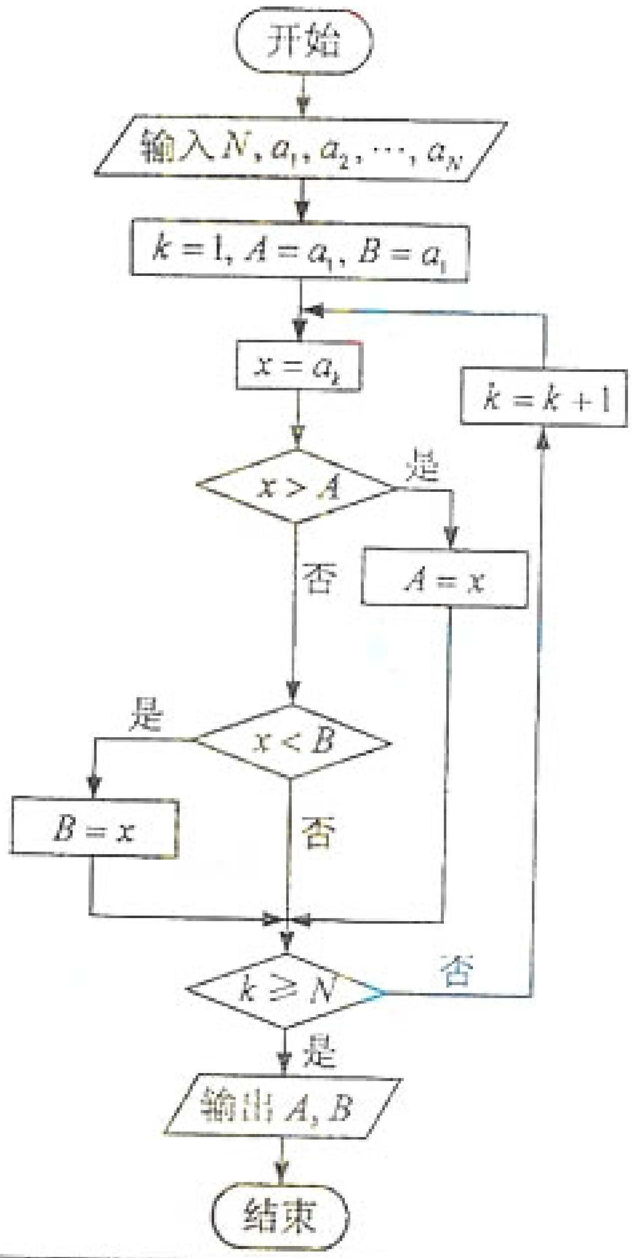
(6) 如果执行右边的程序框图，输入正整数 $N(N\geqslant 2)$ 和实数 $a_1,a_2,\cdots,a_N$，输出 A，B，则

（A）$A+B$ 为 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 的和

（B）$\dfrac{A+B}{2}$ 为 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 的算术平均数

（C）A 和 B 分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 中最大的数和最小的数

（D）A 和 B 分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 中最小的数和最大的数



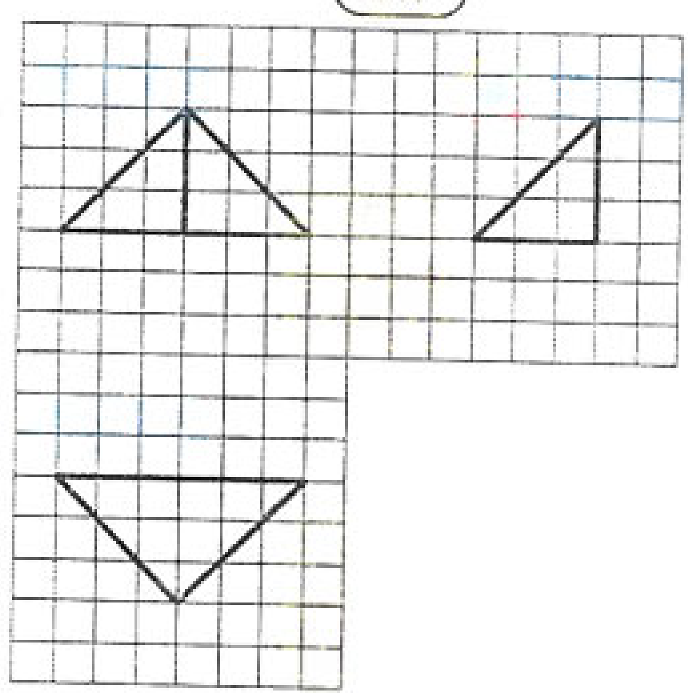
(7) 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某几何体的三视图，则此几何体的体积为

（A）6

（B）9

（C）12

（D）18



(8) 平面 α 截球 O 的球面所得圆的半径为 1，球心 O 到平面 α 的距离为 $\sqrt{2}$，则此球的体积为

（A）$\sqrt{6}\pi$　　（B）$4\sqrt{3}\pi$　　（C）$4\sqrt{6}\pi$　　（D）$6\sqrt{3}\pi$

(9) 已知 $\omega>0$，$0<\varphi<\pi$，直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 图像的两条相邻的对称轴，则 $\varphi=$

（A）$\dfrac{\pi}{4}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{\pi}{2}$　　（D）$\dfrac{3\pi}{4}$

（10）等轴双曲线 C 的中心在原点，焦点在 x 轴上，C 与抛物线 $y^2=16x$ 的准线交于 A，B 两点，$|AB|=4\sqrt{3}$，则 C 的实轴长为

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）4　　（D）8

（11）当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$4^x<\log_a x$，则 a 的取值范围是

（A）$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　（B）$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$　　（C）$(1,\sqrt{2})$　　（D）$(\sqrt{2},2)$

（12）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为

（A）3 690　　（B）3 660　　（C）1 845　　（D）1 830

第II卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题～第 21 题为必考题，每个试题考生都必须做答。第 22 题～第 24 题为选考题，考生根据要求做答。

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分。

（13）曲线 $y=x(3\ln x+1)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为________.

（14）等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3+3S_2=0$，则公比 $q=$________.

（15）已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为 $45°$，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，则 $|\boldsymbol{b}|=$________.

（16）设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$________.

三．解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）（本小题满分 12 分）

已知 a，b，c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A，B，C 的对边，$c=\sqrt{3}a\sin C-c\cos A$.

（Ⅰ）求 A；

（Ⅱ）若 $a=2$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，求 b,c.

（18）（本小题满分 12 分）

某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花，然后以每枝 10 元的价格出售. 如果当天卖不完，剩下的玫瑰花作垃圾处理.

（Ⅰ）若花店一天购进 17 枝玫瑰花，求当天的利润 y（单位：元）关于当天需求量 n（单位：枝，$n\in\mathbf{N}$）的函数解析式；

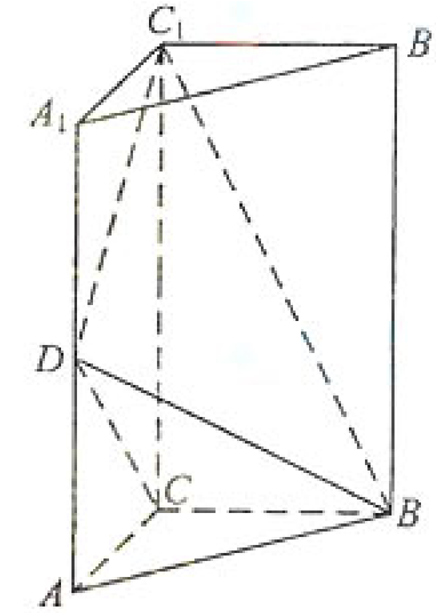
（Ⅱ）花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量（单位：枝），整理得下表：

日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频　数	10	20	16	16	15	13	10

（ⅰ）假设花店在这 100 天内每天购进 17 枝玫瑰花，求这 100 天的日利润（单位：元）的平均数；

（ⅱ）若花店一天购进 17 枝玫瑰花，以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率，求当天的利润不少于 75 元的概率.

（19）（本小题满分 12 分）



如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱垂直底面，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=\frac{1}{2}AA_1$，D 是棱 AA_1 的中点.

（Ⅰ）证明：平面 $BDC_1 \perp$ 平面 BDC；

（Ⅱ）平面 BDC_1 分此棱柱为两部分，求这两部分体积的比.

（20）（本小题满分 12 分）

设抛物线 C：$x^2=2py\,(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l. A 为 C 上一点，已知以 F 为圆心，FA 为半径的圆 F 交 l 于 B，D 两点.

（Ⅰ）若 $\angle BFD=90°$，$\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$，求 p 的值及圆 F 的方程；

（Ⅱ）若 A，B，F 三点在同一直线 m 上，直线 n 与 m 平行，且 n 与 C 只有一个公共点，求坐标原点到 m，n 距离的比值.

（21）（本小题满分 12 分）

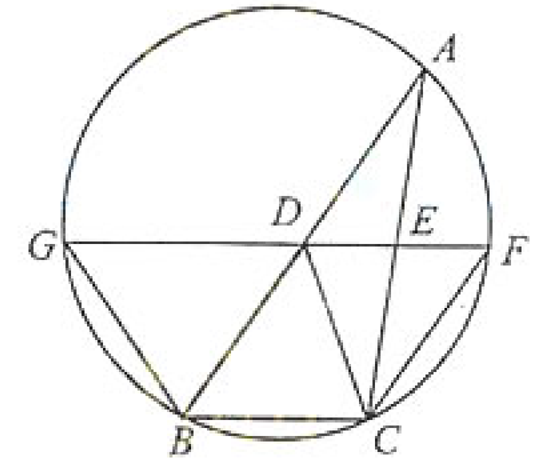
设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-2$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $a=1$，k 为整数，且当 $x>0$ 时，$(x-k)f'(x)+x+1>0$，求 k 的最大值.

请考生在第 22、23、24 题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题计分。做答时请写清题号。

（22）（本小题满分 10 分）选修 4—1：几何证明选讲



如图，D，E 分别为 $\triangle ABC$ 边 AB，AC 的中点，直线 DE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 F，G 两点. 若 $CF/\!/AB$，证明：

（Ⅰ）$CD=BC$；

（Ⅱ）$\triangle BCD \backsim \triangle GBD$.

（23）（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = 2\cos\varphi, \\ y = 3\sin\varphi, \end{cases}$ （φ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho = 2$．正方形 $ABCD$ 的顶点都在 C_2 上，且 A，B，C，D 依逆时针次序排列，点 A 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$．

（Ⅰ）求点 A，B，C，D 的直角坐标；

（Ⅱ）设 P 为 C_1 上任意一点，求 $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ 的取值范围．

（24）（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x + a| + |x - 2|$．

（Ⅰ）当 $a = -3$ 时，求不等式 $f(x) \geqslant 3$ 的解集；

（Ⅱ）若 $f(x) \leqslant |x - 4|$ 的解集包含 $[1, 2]$，求 a 的取值范围．

2012年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学试题答案

一．选择题

（1）B　（2）D　（3）D　（4）C　（5）A　（6）C

（7）B　（8）B　（9）A　（10）C　（11）B　（12）D

二．填空题

（13）$y=4x-3$　（14）-2　（15）$3\sqrt{2}$　（16）2

三．解答题

（17）解：

（Ⅰ）由$c=\sqrt{3}a\sin C-c\cos A$及正弦定理得

$$\sqrt{3}\sin A\sin C-\cos A\sin C-\sin C=0.$$

由于$\sin C\neq 0$，所以$\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$.

又$0<A<\pi$，故　$A=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$，故$bc=4$.

而　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，故$b^2+c^2=8$.

解得　$b=c=2$.

（18）解：

（Ⅰ）当日需求量$n \geqslant 17$时，利润 $y=85$.

当日需求量$n<17$时，利润 $y=10n-85$.

所以y关于n的函数解析式为

$$y=\begin{cases}10n-85, & n<17,\\ 85, & n\geqslant 17,\end{cases} \quad (n\in \mathbf{N}).$$

（Ⅱ）（ⅰ）这100天中有10天的日利润为55元，20天的日利润为65元，16天的日利润为75元，54天的日利润为85元，所以这100天的日利润的平均数为

$$\frac{1}{100}(55\times 10+65\times 20+75\times 16+85\times 54)=76.4.$$

（ⅱ）利润不低于75元当且仅当日需求量不少于16枝．故当天的利润不少于75元的概率为

$$p=0.16+0.16+0.15+0.13+0.1=0.7.$$

（19）证明：

（Ⅰ）由题设知$BC\perp CC_1$，$BC\perp AC$，$CC_1\cap AC=C$，所以$BC\perp$平面ACC_1A_1.

又$DC_1\subset$平面ACC_1A_1，所以$DC_1\perp BC$.

由题设知$\angle A_1DC_1=\angle ADC=45°$，所以$\angle CDC_1=90°$，即$DC_1\perp DC$．又$DC\cap BC=C$，所以$DC_1\perp$平面$BDC$．又$DC_1\subset$平面$BDC_1$，故平面$BDC_1\perp$平面$BDC$.

（Ⅱ）设棱锥$B-DACC_1$的体积为V_1，$AC=1$．由题意得

$$V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1+2}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}.$$

又三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积$V=1$，所以$(V-V_1):V_1=1:1$.

故平面BDC_1分此棱柱所得两部分体积的比为$1:1$.

（20）解：

（Ⅰ）由已知可得$\triangle BFD$为等腰直角三角形，$|BD|=2p$，圆F的半径$|FA|=\sqrt{2}p$.

由抛物线定义可知A到l的距离$d=|FA|=\sqrt{2}p$.

因为$\triangle ABD$的面积为$4\sqrt{2}$，所以$\frac{1}{2}|BD|\cdot d=4\sqrt{2}$，即$\frac{1}{2}\cdot 2p\cdot\sqrt{2}p=4\sqrt{2}$，

解得 $p=-2$（舍去），$p=2$.

所以$F(0,1)$，圆F的方程为

$$x^2+(y-1)^2=8.$$

（Ⅱ）因为 A，B，F 三点在同一直线 m 上，所以 AB 为圆 F 的直径，$\angle ADB=90°$.

由抛物线定义知

$$|AD|=|FA|=\frac{1}{2}|AB|,$$

所以 $\angle ABD=30°$，m 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 m 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，由已知可设 n：$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$，代入 $x^2=2py$ 得

$$x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}px-2pb=0.$$

由于 n 与 C 只有一个公共点，故 $\Delta=\frac{4}{3}p^2+8pb=0$. 解得 $b=-\frac{p}{6}$.

因为 m 的截距 $b_1=\frac{p}{2}$，$\frac{|b_1|}{|b|}=3$，所以坐标原点到 m，n 距离的比值为 3.

当 m 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，由图形对称性可知，坐标原点到 m，n 距离的比值为 3.

（21）解：

（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=e^x-a$.

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增.

若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 单调递增.

（Ⅱ）由于 $a=1$，所以 $(x-k)f'(x)+x+1=(x-k)(e^x-1)+x+1$.

故当 $x>0$ 时，$(x-k)f'(x)+x+1>0$ 等价于

$$k<\frac{x+1}{e^x-1}+x \quad (x>0). \qquad ①$$

令 $g(x)=\frac{x+1}{e^x-1}+x$，则 $g'(x)=\frac{-xe^x-1}{(e^x-1)^2}+1=\frac{e^x(e^x-x-2)}{(e^x-1)^2}$.

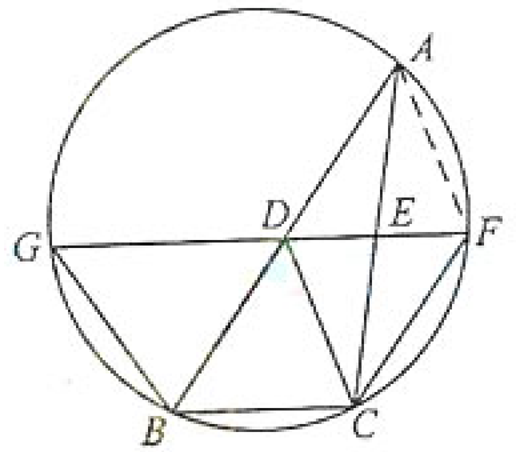
由（Ⅰ）知，函数 $h(x)=e^x-x-2$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增. 而 $h(1)<0$，$h(2)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在唯一的零点. 故 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在唯一的零点. 设此零点为 α，则 $\alpha\in(1,2)$.

当 $x\in(0,\alpha)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(\alpha,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$. 所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最小值为 $g(\alpha)$. 又由 $g'(\alpha)=0$，可得 $e^{\alpha}=\alpha+2$，所以 $g(\alpha)=\alpha+1\in(2,3)$.

由于①式等价于 $k<g(\alpha)$，故整数 k 的最大值为2.

（22）证明：

（Ⅰ）因为 D, E 分别为 AB, AC 的中点，所以 $DE//BC$．又已知 $CF//AB$，故四边形 $BCFD$ 是平行四边形，所以 $CF=BD=AD$．而 $CF//AD$，连结 AF，所以 $ADCF$ 是平行四边形，故 $CD=AF$．



因为 $CF//AB$，所以 $BC=AF$，故 $CD=BC$．

（Ⅱ）因为 $FG//BC$，故 $GB=CF$．

由（Ⅰ）可知 $BD=CF$，所以 $GB=BD$．

而 $\angle DGB=\angle EFC=\angle DBC$，故 $\triangle BCD \backsim \triangle GBD$．

（23）解：

（Ⅰ）由已知可得

$$A(2\cos\frac{\pi}{3}, 2\sin\frac{\pi}{3}),\quad B(2\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}), 2\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})),$$

$$C(2\cos(\frac{\pi}{3}+\pi),\ 2\sin(\frac{\pi}{3}+\pi)), D(2\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}),\ 2\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2})),$$

即 $A(1,\sqrt{3})$，$B(-\sqrt{3},1)$，$C(-1,-\sqrt{3})$，$D(\sqrt{3},-1)$．

（Ⅱ）设 $P(2\cos\varphi, 3\sin\varphi)$，令 $S=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$，则

$$S=16\cos^2\varphi+36\sin^2\varphi+16$$
$$=32+20\sin^2\varphi.$$

因为 $0\leqslant\sin^2\varphi\leqslant 1$，所以 S 的取值范围是 $[32,52]$．

（24）解：

（Ⅰ）当 $a=-3$ 时，$f(x)=\begin{cases}-2x+5, & x\leqslant 2,\\ 1, & 2<x<3,\\ 2x-5, & x\geqslant 3.\end{cases}$

当 $x\leqslant 2$ 时，由 $f(x)\geqslant 3$ 得 $-2x+5\geqslant 3$，解得 $x\leqslant 1$；

当 $2<x<3$ 时，$f(x)\geqslant 3$ 无解；

当 $x\geqslant 3$ 时，由 $f(x)\geqslant 3$ 得 $2x-5\geqslant 3$；解得 $x\geqslant 4$；

所以 $f(x)\geqslant 3$ 的解集为 $\{x\,|\,x\leqslant 1\}\cup\{x\,|\,x\geqslant 4\}$．

（Ⅱ）$f(x)\leqslant|x-4| \Leftrightarrow |x-4|-|x-2|\geqslant|x+a|$．

当 $x\in[1,2]$ 时，$|x-4|-|x-2|\geqslant|x+a|$

$$\Leftrightarrow 4-x-(2-x)\geqslant|x+a|$$

$$\Leftrightarrow -2-a\leqslant x\leqslant 2-a.$$

由条件得 $-2-a\leqslant 1$ 且 $2-a\geqslant 2$，即 $-3\leqslant a\leqslant 0$．

故满足条件的 a 的取值范围为 $[-3,0]$．